جامعة البعث
كلية العلوم – قسم الرياضيات

الاسم :

الرقم :

امتحانات الفصل الدراسي الثاني للعام 2012-2013

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية (ثالثة رياضيات)

المدة : ساعتان . الدرجة : 100 .

السؤال الأول (25 درجات) : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0$$

ثمّ أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية :

$$u|_{x=1} = y-1 \quad ; \quad u_x|_{x=1} = (1-y)^2 - 1$$

السؤال الثاني (15 درجة) :أثبت أنّ طاقة الذبذبات العرضية للوتر المثبت من طرفيه ، تعطى بالعلاقة الآتية :

$E = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}[T_0(u_x)^2 + \rho(x).(u_t)^2].dx$. علماً أنّ T_0 ،مقدار ثابت (مقدار الشد)

و $\rho(x)$ الكثافة الخطية للوتر .

السؤال الثالث (20 درجة) : أوجد حل المعادلة :

$$u_{tt} = 4u_{xx} + \sin 2x - 4\sin 2t \quad , 0 < x < \pi \ , t > 0$$

مع الشروط الابتدائية : $u(x,0) = \sin x \ , \ u_t(x,0) = 2 \ , \ 0 \le x \le \pi$

والشروط الحدية غير المتجانسة : $u(0,t) = \sin 2t \ , \ u(\pi,t) = \sin 2t \ , \ t \ge 0$

السؤال الرابع (25 درجة) : حوّل المسألة الحدية الآتية :

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \ , \ 0 < x < \ell \ , t > 0$$

مع الشرط الابتدائي : $u(x,0) = \varphi(x) \ , \ 0 \le x \le \ell$

والشروط الحدية الآتية : $u(0,t) = \mu_1(t) \ , \ u(\ell,t) = \mu_2(t) \ , \ t \ge 0$

إلى مسألة حدية مع شروط حدية صفرية ، ثمّ أكتب عبارة حل المسألة الناتجة عن هذا التحويل .

تطبيق : عين حل المسألة المطروحة في حالة : $f(x,t) = 1 + \frac{2}{\pi}.xt + t.\sin x$

$$\mu_1(t) = t+1 \ ; \ \mu_2(t) = t^2 + t + 1 \ ; \varphi(x) = 1 + \sin x \quad , \quad \ell = \pi \ ; \ a = 1$$

السؤال ~~الرابع~~ الخامس (15 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ داخل كرة نصف قطرها $R = 1$ في الإحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ والمحقق للشرط الحدي الآتي :

$$(u - u_r)|_{r=1} = \frac{4\sin^4\theta}{1-\cos 2\theta}$$

حمص في 9 /2013/6

مدرس المقرر

الدكتور كثره مخول

سلم تصحيح المعادلات الرياضية الفيزيائية – سنة ثالثة – قسم الرياضيات

فصل ثاني للعام : 2012-2013

جواب السؤال الأول (25 درجة) :

1) إيجاد الحل العام للمعادلة المعطاة (15 درجة) : المعادلة المميزة هي :

$$xdy^2-(x+y)dxdy+ydx^2=0$$ (درجتان)

بالمكاملة نجد أنّ : $y-x=c_1$; $\frac{y}{x}=c_2$. نجري التحويل الآتي :

$$y-x=\xi \ ; \ \frac{y}{x}=\eta$$ (درجتان)

بالاشتقاق والتبديل في المعادلة المعطاة والحصول على الشكل النموذجي :

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{\xi}u_\eta=0$$ (4 درجات)

بحل هذه المعادلة ، بالطرق التي تمت دراستها ، نحصل على الحل العام لها من الشكل :

$$u(\xi,\eta)=\xi[\varphi(\xi)+\psi(\eta)]$$ (4 درجات)

علماً أنّ الدالة $\varphi(\xi)$ تابعة لـ ξ فقط ، والدالة $\psi(\eta)$ تابعة لـ η فقط . وبالعودة إلى المتحولات القديمة ، نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة من الشكل :

$$u(x,y)=(y-x)[\varphi(y-x)+\psi(\frac{y}{x})]$$ (3 درجات)

علماً أنّ الدالة $\psi(\frac{y}{x})$ تابعة لـ $\frac{y}{x}$ فقط ، والدالة $\varphi(y-x)$ تابعة لـ $y-x$ فقط .

2) إيجاد الحل الخاص (10 درجات): لدينا من عبارة الحل العام والشروط الابتدائية المعطاة ، ما يلي :

$$\varphi(y-1)+\psi(y)=1$$
$$\varphi'(y-1)+y\psi'(y)=1-y$$ (5 درجات)

نشتق المعادلة الأولى ، ثمّ نطرح منها الثانية ، نحصل على الدالة : $\psi(y)=-y$ ، وبتعويضها في المعادلة الأولى نجد الدالة : $\varphi(y-1)=1+y$. نبدل هذه القيم في عبارة الحل العام ، نحصل على الحل الخاص المطلوب ، وهو :

$$u(x,y)=(y-x)[y-x+2-\frac{y}{x}]$$ (5 درجات)

جواب السؤال الثاني (15 درجة) : نعين صيغة طاقة الذبذبات العرضية للوتر: $E=K+U$ علماً أنّ U طاقة الوضع و K طاقة الحركة ، وذلك كما يلي :

عنصر الوتر dx الذي يتحرك بالسرعة $v=u_t$ يكون له طاقة حركة هي :

سلم تصحيح المعادلات الرياضية الفيزيائية – سنة ثالثة – قسم الرياضيات

فصل ثاني للعام : 2012-2013

جواب السؤال الأول (25 درجة) :

1) إيجاد الحل العام للمعادلة المعطاة (15 درجة) : المعادلة المميزة هي :

$$xdy^2 - (x+y)dxdy + ydx^2 = 0$$ (درجتان)

بالمكاملة نجد أنّ : $y - x = c_1 \;;\; \dfrac{y}{x} = c_2$. نجري التحويل الآتي :

$$y - x = \xi \;;\; \frac{y}{x} = \eta$$ (درجتان)

بالاشتقاق والتبديل في المعادلة المعطاة والحصول على الشكل النموذجي :

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{\xi}u_\eta = 0$$ (4 درجات)

بحل هذه المعادلة ، بالطرق التي تمت دراستها ، نحصل على الحل العام لها من الشكل :

$$u(\xi,\eta) = \xi[\varphi(\xi) + \psi(\eta)]$$ (4 درجات)

علماً أنّ الدالة $\varphi(\xi)$ تابعة لـ ξ فقط ، والدالة $\psi(\eta)$ تابعة لـ η فقط . وبالعودة إلى المتحولات القديمة ، نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة من الشكل :

$$u(x,y) = (y-x)[\varphi(y-x) + \psi(\frac{y}{x})]$$ (3 درجات)

علماً أنّ الدالة $\psi(\frac{y}{x})$ تابعة لـ $\frac{y}{x}$ فقط ، والدالة $\varphi(y-x)$ تابعة لـ $y-x$ فقط .

2) إيجاد الحل الخاص (10 درجات): لدينا من عبارة الحل العام والشروط الابتدائية المعطاة ، ما يلي :

$$\varphi(y-1) + \psi(y) = 1$$
$$\varphi'(y-1) + y\psi'(y) = 1 - y$$ (5 درجات)

نشتق المعادلة الأولى ، ثمّ نطرح منها الثانية ، نحصل على الدالة : $\psi(y) = -y$ ، وبتعويضها في المعادلة الأولى نجد الدالة : $\varphi(y-1) = 1 + y$. نبدل هذه القيم في عبارة الحل العام ، نحصل على الحل الخاص المطلوب ، وهو :

$$u(x,y) = (y-x)[y - x + 2 - \frac{y}{x}]$$ (5 درجات)

جواب السؤال الثاني (15 درجة) : نعين صيغة طاقة الذبذبات العرضية للوتر: $E = K + U$

علماً أنّ U طاقة الوضع و K طاقة الحركة ، وذلك كما يلي :

عنصر الوتر dx الذي يتحرك بالسرعة $v = u_t$ يكون له طاقة حركة هي :

20

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}\rho(x)[u_t(x,t)]^2\,dx$$

وطاقة حركة الوتر كله تساوي : $K = \dfrac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho(x)[u_t(x,t)]^2 dx$ (3 درجات)

وطاقة وضع الذبذبات العرضية للوتر ذي الشكل : $u(x,t_0) = u_0(x)$ في اللحظة الزمنية $t = t_0$ تساوي العمل اللازم بذله لكي ينتقل الوتر من وضع التوازن إلى الوضع $u_0(x)$.

نفرض أنّ الدالة $u(x,t)$ تعطي المقطع الجانبي للوتر في اللحظة t علماً بأنّ :

$$u(x,t_0) = u_0(x)\ ,\quad u(x,0) = 0$$ (درجتان)

والعنصر dx تحت تأثير محصلة قوى الشد : $Tu_x|_{x+dx} - Tu_x|_x = Tu_{xx}dx$ يقطع خلال الفترة الزمنية dt المسافة $u_t(x,t)dt$. والعمل الذي يبذله الوتر كله خلال الفترة dt يساوي :

$$\left\{\int_0^{\ell}T_0u_{xx}(x,t)u_t(x,t)dx\right\}dt = \left\{T_0u_xu_t\Big|_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^{\ell}T_0u_xu_{xt}dx\right\}dt =$$

$$= \left\{T_0u_xu_t\Big|_{x=0}^{x=\ell} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\ell}T_0(u_x)^2dx\right\}dt$$ (درجتان)

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى t من $t = 0$ إلى $t = t_0$ نحصل على :

$$\int_0^{t_0}\left\{T_0u_xu_t\Big|_{x=0}^{x=\ell} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\ell}T_0(u_x)^2dx\right\}dt =$$

$$= \int_0^{t_0}T_0u_xu_t\Big|_{x=0}^{x=\ell}dt - \frac{1}{2}\left[\int_0^{\ell}T_0(u_x)^2dx\right]_{t=0}^{t=t_0}$$

$$= \int_0^{t_0}T_0u_xu_t\Big|_{x=0}^{x=\ell}dt - \frac{1}{2}\int_0^{\ell}T_0[u_x(x,t_0)]^2dx$$

من شروط البدء ،الحد الأول من الطرف الأيمن لهذه المتساواة يساوي الصفر . (4 درجات)

وإذا كان طرفا الوتر مثبتين فإنّ العمل على طرفي الوتر يكون مساوياً الصفر (عند ذلك $u(x,t)|_{x=0} = 0$ و $u_t(x,t)|_{x=0} = 0$) . ومن ثمّ العمل لا يعتمد عند انتقال الوتر المثبت الطرفين من وضع التوازن $u = 0$ إلى الوضع $u_0(x)$ على طريقة نقل الوتر إلى هذا الوضع ، ويكون مساوياً : $-\dfrac{1}{2}\int_0^{\ell}T_0[u_x(x)]^2dx$ ،أي لطاقة وضع الوتر في اللحظة $t = t_0$ بإشارة مضادة .

وبذلك تكون الطاقة الكلية للوتر مساوية : $E = \dfrac{1}{2}\int_0^{\ell}[T_0(u_x)^2 + \rho(x)(u_t)^2]dx$ (4 درجات)

جواب السؤال الثالث (20 درجة) :

سوف نبحث عن حل المسألة المطروحة على شكل مجموع دالتين : $u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)$

علماً أنّ الدالة $U(x,t)$ تتحدد من العلاقة :

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}(\mu_2(t)-\mu_1(t))=\sin 2t$$

وبالتالي الحل من الشكل : $u(x,t)=\sin 2t+v(x,t)$ " (3 درجات)

نشتق هذه العلاقة ونبدل في المعادلة المعطاة ، نحصل على معادلة جديدة تحدد الدالة المجهولة $v(x,t)$ ، من الشكل : $v_{tt}=4v_{xx}+\sin 2x$ (درجتان)

والدالة المجهولة الجديدة $v(x,t)$ تحقق الشروط الابتدائية الجديدة التالية (من عبارة شكل الحل والشروط الابتدائية المعطاة) : $v|_{t=0}=\sin x \quad , \quad v_t|_{t=0}=0$

وتحقق الشروط الحدية الصفرية الآتية : $v|_{x=0}=0 \quad , \quad v|_{x=\pi}=0$ (درجتان)

حل المسألة الجديدة ، يعطى بالدستور الآتي : (درجتان)

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n.\cos\frac{n\pi}{\ell}at+D_n\sin\frac{n\pi}{\ell}at\right).\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

حيث $a=2,\ell=\pi$. ولدينا :

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin n\xi d\xi=\begin{cases}0\ , \ n\neq 1\\ 1\ , \ n=1\end{cases}$$ (3 درجات)

و $D_n=0$ لأن $\psi(x)=0$. (درجة واحدة)

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}[\sin\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)].f_n(\tau)d\tau$$

علماً أنّ : $$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi$$

$$f_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2\xi.\sin n\xi d\xi=\begin{cases}0\ \ , n\neq 2\\ 1\ , \ n=2\end{cases}$$ (3 درجات)

ومن ثمّ نجد أنّ : $$T_n(t)=\begin{cases}0 \quad , n\neq 2\\ \frac{1}{16}(1-\cos 4t),\ n=2\end{cases}$$ (درجتان)

وبالتالي ، تتحدد الدالة $v(x,t)$ من العلاقة الآتية :

$$v(x,t)=\cos 2t.\sin x+\frac{1}{16}(1-\cos 4t).\sin 2x$$ (درجة واحدة)

وأخيراً الحل المطلوب هو :

$$u(x,t)=\sin 2t+\cos 2t.\sin x+\frac{1}{16}(1-\cos 4t).\sin 2x$$ (درجة واحدة)

67

جواب السؤال الرابع (25 درجة) :

الجزء الأول من السؤال (9 درجات) : من أجل إيجاد هذا الحل ، ندخل دالة مجهولة جديدة $v(x,t)$ بحيث يكون :

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)$$ (درجة واحدة)

التي تمثل الانحراف عن دالة ما معلومة $U(x,t)$. نشتق العلاقة الأخيرة مرة واحدة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثمّ نبدل صيغ هذه المشتقات في المعادلة المعطاة، نجد أنّ الدالة $v(x,t)$ ستعرف بأنها حل المعادلة :

$$v_t-a^2v_{xx}=\overline{f}(x,t)$$

علماً أنّ :

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left[U_t-a^2U_{xx}\right]$$ (درجة واحدة)

من الشروط المعطاة وعبارة التحويل ، نحصل على الشرط الابتدائي الجديد التالي :

$$v(x,0)=\overline{\varphi}(x)$$

علماً أنّ :

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)$$ (درجة واحدة)

وعلى الشروط الحدية الجديدة التالية : $v(0,t)=\overline{\mu_1}(t)\quad,\quad v(\ell,t)=\overline{\mu_2}(t)$

علماً أنّ :

$$\overline{\mu_1}(t)=\mu_1(t)-U(0,t)$$
$$\overline{\mu_2}(t)=\mu_2(t)-U(\ell,t)$$ (درجة واحدة)

نختار الدالة المساعدة $U(x,t)$ بحيث يكون : $\overline{\mu_1}(t)=0\quad,\quad\overline{\mu_2}(t)=0$

ولهذا الغرض يكفي وضع :

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$$ (3 درجات)

ومن ثمّ تعيين الدالة $u(x,t)$ التي تعطي حل المسألة الحدية العامة يؤول إلى تعيين الدالة $v(x,t)$ التي تعطي حل المسألة الحدية بشروط حدية صفرية . (درجتان)

<u>حل التطبيق (16 درجة)</u>: المسألة الحدية الجديدة هي :

$$v_t=v_{xx}+t.\sin x\ ;\ v(x,0)=\sin x\ ;\ v(0,t)=v(\pi,t)=0$$

حل المسألة الحدية الجدية يعطى بالعلاقات :

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\,e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2a^2t}.\sin\frac{\pi n}{\ell}x+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t).\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$ (3 درجات)

علماً أنّ :

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin n\xi\,d\xi=\begin{cases}0 & ,\ n\neq1\\1 & ,\ n=1\end{cases}$$ (3 درجات)

$$v_n(t)=\int_0^{t}e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2a^2(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t.\sin\xi\,\sin n\xi\,d\xi = \begin{cases}0 & ,n \neq 1\\ t & ,n = 1\end{cases}$$ (3 درجات)

وبالتالي :

$$v_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau = \begin{cases}0 & ,n \neq 1\\ t-1+e^{t} & ,n = 1\end{cases}$$ (4 درجات)

وبالتالي حل المسألة الجديدة هو : $v(x,t) = 2e^{-t}.\sin x + (t-1).\sin x$ (درجة واحدة)

وأخيراً الحل المطلوب هو :

$$u(x,t) = t + 1 + \frac{x}{\pi}t^2 + 2e^{-t}.\sin x + (t-1)\sin x$$ (درجتان)

جواب السؤال ~~الرابع~~ الخامس (15 درجة) : حل معادلة لابلاس في هذه الحالة يعطى بالدستور :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n.P_n(\cos\theta)$$ (درجتان)

ومنه نجد أن :

$$u_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n r^{n-1}.P_n(\cos\theta)$$

$$(u - u_r)_{r=1} = A_0.P_0(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}(1-n)A_n.P_n(\cos\theta)$$ (درجتان)

بالاستفادة من الشرط الحدي نحصل على :

$$1 - \cos 2\theta = A_0 + (0)A_1.P_1(\cos\theta) - A_2.P_2(\cos\theta) + \ldots\ldots$$

$$2 - 2\cos^2\theta = A_0(1) - A_2\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) + \ldots\ldots$$ (4 درجات)

بالمطابقة نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} A_0 + \tfrac{1}{2}A_2 &= 2\\ -\tfrac{3}{2}A_2 &= -2\end{aligned}\right\} \Rightarrow A_0 = \frac{4}{3}\ ;\ A_2 = \frac{4}{3}$$ (4 درجات)

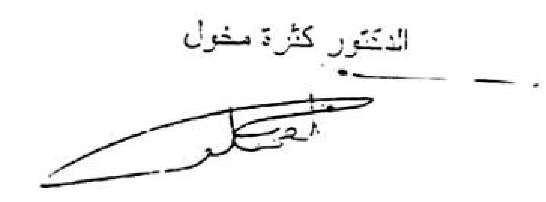
وبقية الثوابت معدومة ، ما عدا A_1 وذلك من أجل أية قيمة له . (درجة واحدة)

وبالتالي الحل المطلوب هو :

$$u(r,\theta) = A_0 + \rho^2 A_2\cos 2\varphi + 0$$

$$= \frac{4}{3} + A_1 r.\cos\theta + \frac{2r^2}{3}(3\cos^2\theta - 1)$$ (درجتان)

الدكتور كثرة مخول



17

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الدراسي الأول للعام 2014-2015 — الاسم :

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية (طلاب السنة الثالثة رياضيات) — الرقم :

الدرجة : 100 .

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (30 درجة) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$u_{xx} - 4x^2 u_{yy} - \frac{1}{x} u_x = 0$$

في المنطقة $x > 0 \,, |y| < \infty$. ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية :

$$u\big|_{x=1} = y^2 + 1 \quad ; \quad u_x\big|_{x=1} = 4$$

السؤال الثاني (25 درجة) : أوجد حل المعادلة :

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \ (0 < x < 1 \ , t > 0)$$

والمحقق للشروط الابتدائية : $u\big|_{t=0} = x + 1 \,, \quad u_t\big|_{t=0} = 0 \,, (0 \le x \le 1)$

والشروط الحدية غير المتجانسة : $u\big|_{x=0} = t + 1 \quad , \quad u\big|_{x=1} = t^3 + 2 \quad , t > 0$

السؤال الثالث (28 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من النمط المكافئ :

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - 2u = \cos t . \sin x . e^x$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \cos x . e^x$$

السؤال الرابع (17 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات الكروية $u(r,\theta)$ ، داخل كرة نصف قطرها $(R = 1)$ ، والمحقق للشرط الحدي الآتي :

$$(u - u_r)\big|_{r=1} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta$$

....

حمص في 21 / 1 / 2015

مدرس المقرر

أ. د. كثره مخول

تصحيح المعادلات الرياضية الفيزيائية سنة ٣ رياضيات ف١ ٢٠١٤ - ٢٠١٥

11

ح/ السؤال الأول (٣٠ درجة):

1) إيجاد الحل العام: المعادلة من النمط الزائدي لأنه $B^2-AC>0$ ، المعادلة المميزة $dy^2-4x^2dx^2=0$ وحلولها: $y+x^2=c_1,\ y-x^2=c_2$ 15

نشتق وتبدل من المعادلة المعطاة نحصل على الشكل النموذجي بالشكل:

ندب التحويل: $\xi=y+x^2,\ \eta=y-x^2$

$$u_{\xi\eta}=0$$

حل هذه المعادلة:

$$u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

حيث φ دالة تابعة لـ ξ فقط، و ψ دالة تابعة لـ η فقط

وبالعودة إلى المتحولات القديمة x, y نجد الحل العام وهو:

$$u(x,y)=\varphi(y+x^2)+\psi(y-x^2)$$

حيث φ دالة تابعة لـ $y+x^2$ فقط، و ψ دالة اختيارية تابعة لـ $y-x^2$ فقط.

2) إيجاد الحل الخاص: 10

من الشروط الابتدائية المعطاة وعبارة الحل العام ومشتقة عبارة الحل العام بالنسبة لـ x نجد أن:

$$\varphi(y+1)+\psi(y-1)=y^2+1$$

$$2\varphi'(y+1)-2\psi'(y-1)=4$$

حل جملة المعادلتين وإيجاد الدالتين:

$$\varphi(y+1)=\frac{1}{2}(y+1)^2\ ;\ \psi(y-1)=\frac{1}{2}(y-1)^2$$

نعوض في عبارة الحل العام كل من الدالتين φ, ψ نحصل على الحل الخاص:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(y+x^2)^2+\frac{1}{2}(y-x^2)^2$$

أو:

$$u(x,y)=x^4+y^2$$

#

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

نبحث عن الحل من الشكل:

$$u(x,t) = U(x,t) + w(x,t)$$

علماً أن $w(x,t)$ دالة مجهولة جديدة و $U(x,t)$ دالة تتحدد من العلاقة

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = t+1 + x(t^3 - t + 1)$$

وبالتالي نكتب الحل من الشكل

$$u(x,t) = t+1 + x(t^3-t+1) + w(x,t)$$

نشتقه مرتين بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x، نعوض في المعادلة فنحصل على معادلة جديدة من الشكل

$$w_{tt} = w_{xx} - 6x \cdot t$$

والدالة $w(x,t)$ تحقق الشروط الابتدائية الجديدة (من عبارة شكل الحل والشروط الابتدائية المعطاة):

$$w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = x - 1$$

الدالة $w(x,t)$ تحقق الشروط الحدية الصفرية:

$$w|_{x=1} = 0, \quad w|_{x=0} = 0$$

المسألة الجديدة يعطى بالدستور الآتي:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\frac{n\pi}{l}at + D_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

بما $l = 1$ ، $a = 1$ ، $f(x,t) = -6x\,t$ ، $\varphi(x) = 0$ ، $\psi(x) = x - 1$

حساب الثوابت C_n ، D_n والدالة $T_n(t)$:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi = 0 \quad (\varphi(x) = 0 \text{ لأن})$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (\xi - 1)\cdot \sin n\pi\xi\, d\xi = \frac{-2}{(n\pi}$$

$$T_n(t) = \frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\cdot f_n(\tau)\, d\tau$$

حيث:

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi = 2\int_0^1 -6\xi\cdot t\cdot \sin n\pi\xi\, d\xi = \frac{12(-1)^n t}{n\pi}$$

أي:

$$T_n(t) = \frac{12}{(n\pi)^2}(-1)^n\left(\frac{t}{n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^2}\cdot \sin n\pi t\right)$$

نعوض في عبارة الحل $w(x,t)$ ثم إلى عبارة شكل الحل $u(x,t)$ نحصل على الحل المطلوب

$$u(x,t) = t+1 + x(t^3-t+1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(n\pi)^2}\left(\frac{6(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} - 1\right)\sin n\pi t + \frac{12(-1)^n}{(n\pi)^3}t\right]\cdot \sin n\pi x.$$

#

السؤال الثالث (28 درجة):

نجري التحويل الآتي:

$$u(x,t) = e^{\left[c - \frac{b^2}{4a^2}\right]t - \frac{b}{2a^2}x} \cdot v(x,t)$$

من المعادلة المعطاة لدينا $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=2$ وبالتالي عبارة التحويل تأخذ الشكل:

$$u(x,t) = e^{t+x} \cdot v(x,t)$$

نشتق هذه العلاقة مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x، ونبدل في المعادلة المعطاة نحصل على المعادلة الجديدة:

$$v_t - v_{xx} = \cos t \cdot \sin x \cdot e^{-t}$$

من عبارة التحويل والشرط الابتدائي المعطى، نجد الشرط الابتدائي الجديد:

$$v|_{t=0} = \cos x$$

حل المسألة الجديدة يعطى بالدستور:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$$

معطيات المسألة الجديدة، نبدل في الدستور نجد:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\xi \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau} \cdot \cos\tau \, d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \cdot \frac{d\xi}{2\sqrt{t-\tau}}$$

في التكامل الأول نجري التحويل $z = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}$ ، نحصل على

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\sqrt{t}\, z + x) \cdot e^{-z^2} dz = e^{-t} \cdot \cos x$$

حيث أجرينا التحويل $2\sqrt{t} = \mu$ وبعد ذلك تم الاشتقاق بالنسبة لـ μ ، فحصلنا على معادلة تفاضلية [illegible] ثم وجدنا [illegible] قيمة التكامل الأول I_1 .

في التكامل الثاني نبدأ أولاً بحساب التكامل الداخلي ومن أجل ذلك نفرض أنه $z = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t-\tau}}$ نجد:

$$\text{التكامل الداخلي} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\sqrt{t-\tau}\, z + x) \cdot e^{-z^2} dz =$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\sqrt{t-\tau}\, z) \cdot e^{-z^2} dz + \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\sqrt{t-\tau}\, z \cdot e^{-z^2} dz$$

"0" دالة فردية

$$= 0 + \sin x \, e^{-(t-\tau)}$$

التكامل الثاني بالاعتماد على ما سبق I_1 نجد:

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^t \sin x \cdot e^{-t} \cdot \cos\tau \, d\tau = e^{-t} \cdot \sin x \cdot \sin t$$

وبالتالي الحل المطلوب هو:

$$u(x,t) = e^{x} [\cos x + \sin x \cdot \sin t] \quad [illegible]$$

السؤال الرابع (17 درجة):

الحل يعطى بالدستور:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cdot P_n(\cos\theta)$$

حساب u_r:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n-1} \cdot P_n(\cos\theta)$$

حساب $u - u_r$:

$$u - u_r = A_0 P_0(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - n r^{n-1}) A_n P_n(\cos\theta)$$

وبالتالي بالاعتماد على الشرط الحدي المعطى نجد:

$$\frac{3}{2}\sin^2\theta = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-n) A_n \cdot P_n(\cos\theta)$$

$$= A_0 - A_2 P_2(\cos\theta) + \dots \quad , \forall A_1$$

$$= A_0 - A_2\left[\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right] + \dots$$

$$= A_0 - \frac{A_2}{2}(2 - 3\sin^2\theta) + \dots$$

بالمطابقة نجد أن:

$$A_0 - A_2 = 0 \; ; \; \frac{3}{2}A_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow A_0 = 1, \; A_2 = 1$$

وذلك من أجل أي قيم للثابت A_1 وبقية الثوابت معدومة.

الحل المطلوب هو:

$$u(r,\theta) = A_0 P_0(\cos\theta) + A_1 r P_1(\cos\theta) + A_2 r^2 \cdot P_2(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) = 1 + A_1 r \cdot \cos\theta + r^2\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) \; ; \forall A_1$$

وبالتالي حصلنا على عدد لانهائي من الحلول والتي تحقق المعادلة وتحقق الشرط الحدي المعطى.

د. لمى نحول

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

الاسم : محمد الحسين

امتحان الفصل الدراسي الثاني للعام 2014-2015

الرقم : ٨٤٦٣٣

المقرر: **المعادلات الرياضية الفيزيائية** (س3 رياضيات) . الدرجة 100

السؤال الأول (25 درجة) : لنكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$\frac{\partial}{\partial y}[(y+x)u_x + u] = 2(y+x)$$

والمطلوب : 1) أثبت أنّ المعادلة المعطاة من النمط الزائدي في المنطقة $0 < x, \infty > y$ ، ثمّ أوجد الحل العام لها .

2) أوجد الحل الخاص لها ، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية :

$$u\big|_{y=x} = x^2 \quad , \quad u_x\big|_{y=x} = 1+x$$

السؤال الثاني (20 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$u_{tt} = u_{xx} + 6.\sin 3t \sin 3x - 4\sin 2t \quad , (\, 0 < x < \pi \;\; , t > 0)$$

والمحقق للشروط الابتدائية : $u\big|_{t=0} = \sin 3x \;\; , \;\; u_t\big|_{t=0} = 2 \; , (\, 0 \le x \le \pi \,)$

والشروط الحدية : $u\big|_{x=0} = 2\sin t.\cos t \quad ; \quad u\big|_{x=\pi} = \sin 2t \quad , t > 0$

السؤال الثالث (15 درجة) : إذا كانت الدالة $u(x,t)$ متصلة ومحدودة في المنطقة $0 \le x \le \ell , 0 \le t \le T$ ، تحقق معادلة التوصيل الحراري :

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , \quad (0 < x < \ell \, , t > 0)$$

والشرط الابتدائي : $u(x,0) = \varphi(x)$

والشروط الحدية : $u(0,t) = \mu_1(t) \quad , \quad u(\ell,t) = \mu_2(t)$

فأثبت أنّ للمعادلة حل وحيد من أجل $0 \le x \le \ell , t \ge 0$.

السؤال الرابع (20 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = u_{xx} + u + \cos x , \; 0 < x < \tfrac{\pi}{2} , t > 0$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي : $u(x,0) = \cos x$

والشروط الحدية الصفرية الآتية : $u_x\big|_{x=0} = 0 \;\; ; \;\; u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$

السؤال الخامس (20 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$ ، داخل كرة نصف قطرها $(R=1)$ والمحقق للشرط الحدي الآتي :

$$(u - u_r)\big|_{r=1} = \frac{1}{2}[\sqrt{2}\sin(2\varphi + \frac{\pi}{4}) + 1](1 - \cos 2\theta)$$

ثمّ استنتج أنّ للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول .

حمص في 5 / 7 / 2015

مدرس المقرر

أ. د. كثره نحول

جامعة البعث
كلية العلوم – قسم الرياضيات

امتحان الفصل الدراسي الثاني للعام 2013-2014

الاسم : علاء تريا سجى

المقرر: المعادلات الرياضية الفيزيائية (لطلاب السنة الثالثة رياضيات) . الرقم :

المدة : ساعة ونصف . الدرجة : 100 .

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (10 درجات) : أكتب دستور حل معادلة التوصيل الحراري المتجانسة على مستقيم لانهائي (مسألة كوشي) ، $u(x,t)$ والمحقق للشرط الابتدائي : $u(x,t)|_{t=0} = \psi(x)$.
وبفرض أنّ $\psi(x)$ دالة زوجية ومحدودة ، أثبت أنّ الدالة $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ تؤول إلى الصفر عندما $x = 0$.

السؤال الثاني (25 درجة): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$u_{xy} - \frac{1}{y} u_x = 2xy$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية الآتية :

$$u(x,y)|_{y=x} = x^4 \;\; ; \;\; u_y(x,y)|_{y=x} = 2x^3$$

السؤال الثالث (25 درجة) : أوجد حل المعادلة :

$$u_{tt} = 4u_{xx} + t.\sin 2x - 16\sin 4t \quad , (0 < x < \pi \;\; , t > 0)$$

والمحقق للشروط الابتدائية : $u|_{t=0} = \sin 2x \;\; , \quad u_t|_{t=0} = 4$

والشروط الحدية: $u|_{x=0} = \sin 4t \quad , \quad u|_{x=\pi} = \sin 4t$

السؤال الرابع (**25 درجة**) : أوجد حل المعادلة :

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + e^x (t+1) \quad ,(0 < x < 1 \;, t > 0)$$

والمحقق للشرط الابتدائي : $u|_{t=0} = e^x \sin \pi x$

والشروط الحدية : $u|_{x=0} = t \quad , \quad u|_{x=1} = e.t$

السؤال الخامس (15 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$ ، داخل كرة نصف قطرها $(R = 1)$ والمحقق للشروط الحدية الآتية :

$$(u + u_r)|_{r=1} = [3\sqrt{2}\cos(2\varphi - \frac{\pi}{4}) + 3\sin 2\varphi + 9] \sin^2\theta$$

حمص في 4 /6/ 2014 مدرس المقرر : أ. د. كثره مخول

١٨

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

الاسم :

امتحانات الفصل الأول للعام 2013-2014

الرقم :

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية (ثالثة رياضيات)

المدة : ساعتان . الدرجة : 100 .

اجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (28 درجة) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$xyu_{xy} + xu_x - yu_y - u = 2y$$

ثمّ أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية :

$$u\Big|_{y=\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} \quad ; \quad u_y\Big|_{y=\frac{1}{x}} = x - 1$$

السؤال الثاني (30 درجة) : حوّل المسألة العامة الحدية الأولى لمعادلة الذبذبات الحـرة للوتر :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , 0 < x < \ell \, , t > 0$$

مع الشروط الابتدائية : $u(x,0) = \varphi(x) \; , \; u_t(x,0) = \psi(x) \; , \; 0 \le x \le \ell$

والشروط الحدية غير المتجانسة : $u(0,t) = \mu_1(t) \; ; \; u(\ell,t) = \mu_2(t) \; , \; t \ge 0$

إلى مسألة حدية مع شروط حدية صفرية . ثمّ أكتب عبارة حل المسألة الناتجة عـن هـذا التحويل .

تطبيق : أوجد حل المسألة الحدية السابقة في حالة : $f(x,t) = -4\sin 2t + 4\sin x$

$$a = 2 ; \ell = \pi \; ; \; \varphi(x) = 0 \; , \; \psi(x) = 2 + \sin 2x \; ; \; \mu_1(t) = \mu_2(t) = \sin 2t$$

السؤال الثالث (24 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$u_t = u_{xx} + \frac{2}{\pi} x.t + t.\sin x + 1$$

والمحقق للشرط الابتدائي : $u(x,0) = 1 + \sin x \; , \; 0 \le x \le \pi$

والشروط الحدية الآتية : $u(0,t) = t + 1 \; , \; u(\pi,t) = t^2 + t + 1 , \; t \ge 0$

السؤال الرابع (18 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية حالة $u(\rho,\varphi)$ في المنطقة $1 < \rho < 2$ والمحقق للشروط الحدية الآتية :

$$u\big|_{\rho=1} = 1 + \cos^2\varphi \quad , \quad u\big|_{\rho=2} = \sin^2\varphi$$

حمص في 28 /2014/1 مدرس المقرر

أ. د. كثره مخول

١٩

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثالثة للعام 2012-2013 الاسم :

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية (ثالثة رياضيات) الرقم :

المدة : ساعتان . الدرجة : 100 .

اجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (20 درجة) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$(y^2+4x)u_{xy}-2yu_x=(y^2+4x)^2$$

ثمّ أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية :

$$u\big|_{x=y}=y^4+2y^3 \quad ; \quad u_x\big|_{x=y}=y^3+5y^2+4y$$

السؤال الثاني (35 درجة) : حوّل المسألة العامة الحدية الأولى لمعادلة الذبذبات الحرة للوتر :

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad , 0<x<\ell \ , t>0$$

مع الشروط الابتدائية : $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\ ,\ 0\le x\le \ell$

والشروط الحدية غير المتجانسة : $u(0,t)=\mu_1(t)\ ,\ u(\ell,t)=\mu_2(t)\ ,\ t\ge 0$

إلى مسألة حدية مع شروط حدية صفرية . ثمّ أكتب عبارة حل المسألة الناتجة عن هذا التحويل .

تطبيق : أوجد حل المسألة الحدية السابقة في حالة : $f(x,t)=-4\sin 2t+\sin 2x$

$$a=2;\ell=\pi \ ;\varphi(x)=\sin x \ ,\ \psi(x)=2 \ ;\ \mu_1(t)=\mu_2(t)=\sin 2t$$

السؤال الثالث (25 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$u_t-2u_{xx}-2u=2te^{2t}$$

والمحقق للشرط الابتدائي :

$$u(x,0)=\sin x \ , \ 0\le x\le 1$$

السؤال الرابع (20 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ في المنطقة $1<r<2$ والمحقق للشروط الحدية الآتية :

$$u\big|_{r=1}=9\cos 2\theta \quad , \quad u\big|_{r=2}=-\tfrac{3}{2}(5+7\cos 2\theta)$$

حمص في ٣ /9/ 2013 مدرس المقرر

الدكتور كثره مخول

جامعة البعث
كلية العلوم – قسم الرياضيات

الاسم :

الرقم :

امتحان الدورة الثالثة للعام 2011-2012

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية (لطلاب السنة الثالثة رياضيات)

المدة : ساعتان . الدرجة : 100 .

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (30 درجة): لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4$$

والمطلوب :

1) إلى أي نمط تنتمي هذه المعادلة ولماذا ؟
2) أوجد الحل العام لها .
3) أوجد الحل الخاص والذي يحقق الشروط الابتدائية الآتية :

$$u\big|_{x=0} = -y \ , u_x\big|_{x=0} = y-1 \ .$$

السؤال الثاني (25 درجة) : أوجد حل المعادلة :

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 4x.t \quad , (0 < x < 1 \ , t > 0)$$

والمحقق للشروط الابتدائية : $u\big|_{t=0} = x \ , \ u_t\big|_{t=0} = x-1 \ , (0 \le x \le 1)$

والشروط الحدية الآتية : $u\big|_{x=0} = t+1 \quad ; \quad u\big|_{x=1} = 1 \ , t > 0$

السؤال الثالث (25 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من النمط المكافئ :

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - 2u = \cos t . \sin x . e^x$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \cos x . e^x$$

السؤال الرابع (20 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات الكروية $u(r,\theta)$ ، داخل كرة نصف قطرها $(R=1)$ والمحقق للشرط الحدي التالي :

$$(u - u_r)\big|_{r=1} = \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

....

انتهت الأسئلة

حمص في 9/9/2012

مدرس المقرر

الدكتور كنده مخول

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

الاسم : أحمد ...

الرقم : ١٧٩٩٦

امتحانات الفصل الدراسي الثاني للعام 2011-2012

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية (ثالثة رياضيات)

المدة : ساعتان . الدرجة : 100 .

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (34 درجة) : لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 2x^3$$

والمطلوب :

1) أثبت أن المعادلة من النمط الزائدي ، ثمّ أوجد الحل العام لها .

2) أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية الآتية :

$$u\big|_{y=x} = \sin x \quad ; \quad u_x\big|_{y=x} = \cos x$$

السؤال الثاني (25 درجة) : أوجد حل المعادلة :

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin x \quad , (0 < x < \pi \ , t > 0)$$

والمحقق للشروط الابتدائية : $u\big|_{t=0} = 1 \ , \ u_t\big|_{t=0} = x + \sin x$

والشروط الحدية : $u\big|_{x=0} = 1 \quad , \quad u\big|_{x=\pi} = 1 + \pi t$

السؤال الثالث (25 درجة) : أوجد حل المسألة الحدية الآتية :

$$u_t = u_{xx} + 1 + \frac{2xt}{\pi} + t.\sin x \ , \ 0 < x < \pi \ , t > 0$$

والمحقق للشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = 1 + \sin x \quad , \quad 0 \le x \le \pi$$

والشروط الحدية الآتية :

$$u(0,t) = 1 + t \quad , \quad u(\pi,t) = t^2 + t + 1 \ , \ t \ge 0$$

السؤال الرابع (16 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات الكروية ، حالة $u(r,\theta)$ ، داخل كرة نصف قطرها $R = 1$ ، والمحقق للشرط الحدي الآتي :

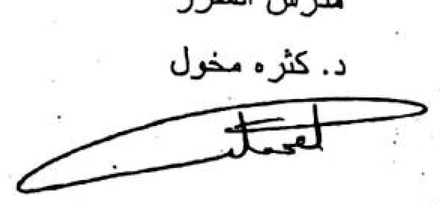
$$(u - u_r)\big|_{r=1} = 1 + \sin^2 \theta$$

****

حمص في 2012/6/17 .

مدرس المقرر

د. كثره مخول



جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

امتحان الفصل الدراسي الثاني للعام 2010–2011   الاسم :

المقرر: المعادلات الرياضية الفيزيائية (لطلاب السنة الثالثة رياضيات)   الرقم :

المدة : ساعتان . الدرجة : 100 .

السؤال الأول (22 درجة) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$2xu_{xx} - 2u_{yy} + u_x = -8$$

في المنطقة $x > 0$ ، ثمّ أوجد الحل الخاص لها ، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية :

$$u\big|_{y=0} = -4x \quad , \quad u_y\big|_{y=0} = 4\sqrt{x}$$

السؤال الثاني (20 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin x . \sin t \quad , \ (0 < x < \pi \ , t > 0)$$

والمحقق للشروط الابتدائية : $u\big|_{t=0} = \dfrac{x}{\pi} \ , \quad u_t\big|_{t=0} = 1 + \sin x \ , (0 \le x \le \pi)$

والشروط الحدية : $u\big|_{x=0} = t \quad , \quad u\big|_{x=\pi} = t + 1 \ \ , t > 0$

السؤال الثالث (18 درجة) : إذا كانت الدالتان $u_1(x,t), u_2(x,t)$ المتصلتان والمحدودتان في كل منطقة تغير المتغيرين x,t ، تحققان معادلة التوصيل الحراري :

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad , \ (-\infty < x < +\infty , t > 0)$$

والشرط الابتدائي : $u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x)$

وبفرض أن $|u(x,t)| < M$ ، حيث M مقدار ثابت موجب ، فأثبت أنّ $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ من أجل $-\infty < x < +\infty , t \ge 0$ ، أي للمعادلة حل وحيد .

السؤال الرابع (22 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t - u_{xx} + 2u_x = e^{x-t} \sin \pi x - e^{x-2t} \ , \ 0 < x < 1 , t > 0$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي : $u(x,0) = e^x (1 + \sin \pi x)$

والشروط الحدية : $u(0,t) = e^{-2t} \ , \ u(1,t) = e^{1-2t}$

السؤال الخامس (18 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$ ، داخل كرة نصف قطرها $(R=1)$ والمحقق للشرط الحدي الآتي :

$$(u + u_r)\big|_{r=1} = [\sqrt{2} \sin(2\varphi + \frac{\pi}{4}) + 2\sin^2 \varphi] \sin^2 \theta + \cos \theta$$

حمص في 7/ 6/2011   مدرس المقرر

د. كثره مخول

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

امتحان الدورة الاستثنائية للعام 2009-2010 — الاسم :

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية — الرقم :

المدة : ساعتان . الدرجة : 80 .

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (25 درجة) : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$2u_{xy} - e^{-x}u_{yy} = 4x$$

ثمّ أوجد الحل الخاص ، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية :

$$u\big|_{y=x} = x^5.\cos x \quad , \quad u_y\big|_{y=x} = x^2+1$$

السؤال الثاني (24 درجة) : أوجد حل المعادلة الآتية :

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + A \quad , \ (0 < x < \ell \ , t > 0)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u\big|_{t=0} = \varphi(x) \ , \ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \ , (0 \le x \le \ell)$

والشروط الحدية : $u\big|_{x=0} = \alpha \quad , \quad u\big|_{x=\ell} = \beta \ , \ t > 0$

علماً أنّ α, β, A ثوابت ، و $\varphi(x) \ , \psi(x)$ دالتان معلومتان مستمرتان وقابلتان للاشتقاق .

تطبيق : أوجد حل المسألة الحدية السابقة في حالة :

$$A = 8 \ , \ a = 2 \ , \ell = \pi \ , \alpha = 1 \ , \ \beta = 2$$

$$\varphi(x) = 1 + \pi x - x^2 \quad , \quad \psi(x) = 0$$

السؤال الثالث (20 درجة) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - 2u = \cos t.\sin x.e^x$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \cos x.e^x$$

السؤال الرابع (14 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ ، في الإحداثيات الإسطوانية $u(\rho,\varphi)$ ، خارج دائرة نصف قطرها $(a=1)$ والمحقق للشرط الحدي التالي :

$$u\big|_{\rho=1} = 1 + \sin^2\varphi$$

حمص في 29 / 8/2010

مدرس المقرر

د. كثره مخول

جامعة البعث
كلية العلوم – قسم الرياضيات

الاسم :

الرقم :

امتحانات الفصل الدراسي الثاني للعام 2009-2010

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية (ثالثة رياضيات)

المدة : ساعتان . الدرجة : 80 .

السؤال الأول (18 درجة) : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xyu_{xy} + xu_x - yu_y - u = 2y$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية :

$$u\big|_{y=\frac{1}{x}} = 1 - \tfrac{1}{x} \quad ; \quad u_y\big|_{y=\frac{1}{x}} = x - 1$$

السؤال الثاني (24 درجة) : حوّل المسألة العامة الحدية الأولى لمعادلة الذبذبات الحرة للوتر :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , 0 < x < \ell \, , t > 0$$

مع الشروط الابتدائية : $u(x,0) = \varphi(x) \; , \; u_t(x,0) = \psi(x) \; , \; 0 \le x \le \ell$

والشروط الحدية غير المتجانسة : $u(0,t) = \mu_1(t) \; , \; u_x(\ell,t) = \mu_2(t) \; , \; t \ge 0$

إلى مسألة حدية مع شروط حدية صفرية . ثم أكتب عبارة حل المسألة الناتجة عن هذا التحويل .

تطبيق : أوجد حل المسألة الحدية السابقة في حالة : $f(x,t) = \sin x \; ; \; \ell = \pi / 2$

$$a = 1 \; ; \; \varphi(x) = 1 + x \; , \; \psi(x) = x \; ; \; \mu_1(t) = 1 \; , \; \mu_2(t) = 1 + t$$

السؤال الثالث (24 درجة) : 1) عين الحل المتصل والذي لا يساوي الصفر بالتطابق في المنطقة المغلقة $(0 \le x \le \ell \; , 0 \le t \le T)$ لمعادلة التوصيل الحراري المتجانسة :

$$u_t = a^2 u_{xx} \; , \; 0 < x < \ell \; , 0 < t \le T$$

والمحقق للشرط الابتدائي : $u(x,0) = \varphi(x) \; , \; 0 \le x \le \ell$

والشروط الحدية المتجانسة : $u(0,t) = 0 \; , \; u(\ell,t) = 0 \quad , \quad 0 \le t \le T$

ثم استنتج دالة المصدر اللحظي النقطي .

2) أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + e^{x-t}$$

والمحقق للشرط الابتدائي : $u(x,0) = e^x . \sin \pi x \; , \; 0 \le x \le 1$

والشروط الحدية : $u(0,t) = t.e^{-t} \; , \; u(1,t) = t.e^{1-t} \; , \; t \ge 0$

السؤال الرابع (14 درجة) : أوجد حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ في المنطقة $1 < r < 2$ والمحقق للشروط الحدية الآتية :

$$u\big|_{r=1} = 9\cos 2\theta \quad , \quad u\big|_{r=2} = -\tfrac{3}{2}(5 + 7\cos 2\theta)$$

مدرس المقرر

حمص في 2010/6/1

الدكتور كثره مخول

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الدراسي الثاني للعام 2009–2008

المقرر : المعادلات الرياضية الفيزيائية (ثالثة رياضيات) . المدة : ساعتان . الدرجة : 80 .

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (13 درجة) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$(x^2+4y)u_{xy}-2xu_y=(x^2+4y)^2$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط : $u|_{y=x}=x^4+2x^3\ ,\ u_y|_{y=x}=x^3+5x^2+4x$

السؤال الثاني (29 درجة) : 1) من الممكن وجود دالة واحدة فقط $u(x,t)$ ، معرّفة في المنطقة : $R:\{0\le x\le \ell\ ,\ t\ge 0\}$ ، وتحقق المعادلة التفاضلية :

$$\rho(x)u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}[k(x)u_x]+F(x,t)$$

علماً أنّ : $t>0\ ,\ 0<x<\ell\ ,\ \rho(x)>0\ ,\ k(x)>0$ ، والشروط الإضافية :

$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\ ;\ u(0,t)=\mu_1(t)\ ,\ u(\ell,t)=\mu_2(t)$$

إذا تحققت الشروط الآتية : أ) الدالة $u(x,t)$ والمشتقات التي تدخل في المعادلة التفاضلية وكذلك المشتقة u_{xt} تكون دوال متصلة في الفترة : $\{0\le x\le \ell\ ;\ t\ge 0\}$.

ب) المعاملان $k(x)$, $\rho(x)$ متصلان في الفترة المغلقة $0\le x\le \ell$.

2) أوجد حل المعادلة في حالة :

$$\mu_1(t)=1\ ;\ \mu_2(t)=t\quad ;\ \varphi(x)=1-\frac{x}{\pi}+\sin 2x\quad ,\ \psi(x)=\frac{x}{\pi}$$

$$F(x,t)=\sin x.\sin t\quad ,\ \rho(x)=k(x)=1\ ,\ \ell=\pi$$

السؤال الثالث (25 درجة) : عين حل معادلة التوصيل الحراري :

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\ ,\ 0<x<\ell\ ,\ t>0$$

والمحقق للشرط الإبتدائي : $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ 0\le x\le \ell$

والشروط الحدية الآتية : $u(0,t)=\mu_1(t)\ ,\ u(\ell,t)=\mu_2(t)\ ,\ t\ge 0$

تطبيق : عين حل المسألة المطروحة في حالة : $f(x,t)=1+(2/\pi).xt+t.\sin x$

$$\mu_1(t)=t+1\ ;\ \mu_2(t)=t^2+t+1\ ;\ \varphi(x)=1+\sin x\quad ,\ \ell=\pi\ ;\ a=1$$

السؤال الرابع (13 درجة) : أوجد الحل العام لمعادلة لابلاس (في الإحداثيات الإسطوانية) :

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

خارج دائرة نصف قطرها a . (الحل العام للمسألة الحدية الخارجية) .

تطبيق : أوجد الحل الخاص للمسألة السابقة والمحقق للشرط الحدي : $u|_{\rho=1}=1+8\cos^3\varphi+\cos\varphi$.

....

حمص في 2009/6/21 مدرس المقرر

الدكتور كثره مخول